

模数、层级、量形

—— 整数规划视角下再话柯布西耶“尺度相当的居住单位”

Modulor, Scale and Quantities

Rethinking Le Corbusier's "Unités d'Habitation de Grandeur Conforme" from the Perspective of Integer Programming

[胡潜] HU Qian ¹
[唐芑] TANG Peng ² (通讯作者)

作者单位
1 东南大学建筑学院 (南京, 210096)
2 城市与建筑遗产保护教育部重点实验室 (东南大学)(南京, 210096)

收稿日期
2023/08/08

国家自然科学基金项目 (52178008)

DOI: 10.19819/j.cnki.ISSN0529-1399.202402003

摘 要
柯布西耶“尺度相当的居住单位”包含高度复杂的空间分配问题。通过整数规划驱动的模板拼贴实验模拟该设计问题的求解,从模数、层级、量形维度讨论整数规划程序与柯布西耶设计思想的关联性,进而窥探柯布西耶对数学工具的运用方式,发掘其中建筑师独有的价值。

关键词
勒·柯布西耶; 马赛公寓; 整数规划; 模板拼贴

ABSTRACT
The "Unités d'habitation de grandeur conforme" advocated by Le Corbusier involves the problem of spatial configuration of high complexity. This paper simulates the solution to this problem through a template collage experiment driven by integer programming, and explicates the relationship between integer programming and Le Corbusier's design ideas in terms of modular, scale and quantities, to shed lights on Le Corbusier's use of mathematics and discover the unique value of architects.

KEY WORDS
Le Corbusier; Unités d'habitation de Marseille; integer programming; template collage

1 尺度相当的居住单位

1945年夏,受法国重建部部长以国家示范项目^[1]名义发起的委托,柯布西耶获得了一次完全自由的机会,用一项建造研究表达他为中产阶级提供的现代居住理念,并将20年的理论钻研付诸实践^[1]。马赛公寓正是这项研究具有代表性的成果(图1),也是本研究的起点,能够容纳337套公寓,提供23种不同的户型,兼有屋顶花园、室内街道、架空底层等公共空间^[2]。将如此庞杂若街区般的功能组织到一栋建筑中,马赛公寓较完美地解决了这一高度复杂的空间分配问题;一直以来,建筑师们都将马赛公寓作为学习、研究的典范。

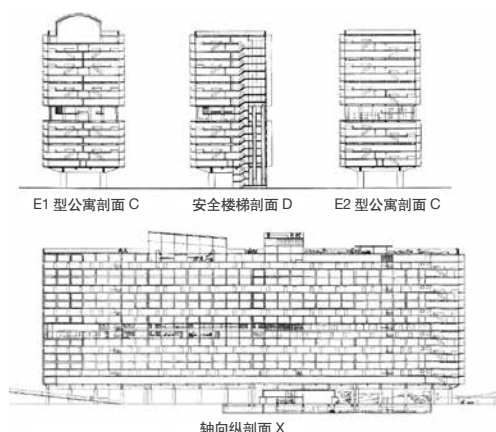
柯布西耶意欲完成的绝不仅是一摞规则、方整的盒子。他始终在思考个体差异需求下的“居住单位的原型”,以“接近最终确定的标准”作为组织这些盒子的依据;同时热切地寻求实践机会,铸就不覆灭于现实的工作^{[3]303}。他所作的马赛公寓、斯特拉斯堡住宅、斐米尼公寓等方案,均采用了类似的户型(图2、3),即以模板填充规则几何体的容器^{[4]25}。

彼时的柯布西耶已从实践中总结出“新建筑五点”“多米诺体系”“模度”等一系列工具性的设计原则,用以达成设计阶段同一性

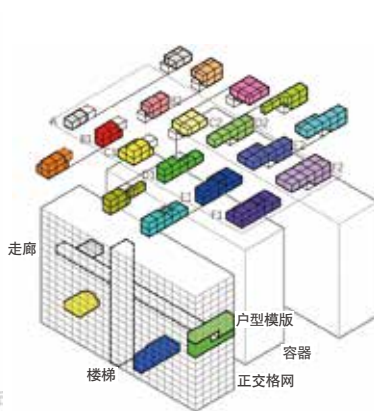
和差异性的平衡^[5]。这些原则并不直接生成设计,但在设计实践中能够部分解放设计者的思考。例如在设计师遇到无法精确定义度量之困境时,“模度”能够给出确定的度量数据标准,从而有效链接设计的构思与结果^[6]。这种链接的背后,暗含更为一般的启示:数学辅助工具或能帮助设计师迅速、准确地做出正确选择;一定程度上,数学方法“使设计工作成为一种科学”^[7]。

柯布西耶如何使用数学工具来思考建筑?一种观点认为,数学工具是柯布的工作进入更高层次意识或存在的手段,接近于艺术家对数学源于宇宙权威之形而上学意义的推崇;这种使用是有别于通常所谓科学之使用的^[8]。另一种意见则将柯布西耶称作是“严格的理性主义者”,同艺术家的主观创意活动切割开来,认为数学逻辑帮助他“将建筑设计置于客观性之上”^[9]。两种观点均建立在对柯布西耶其人的理解与品评上,缺少独立于主体的对比参照,有失论辩意义上的准确。

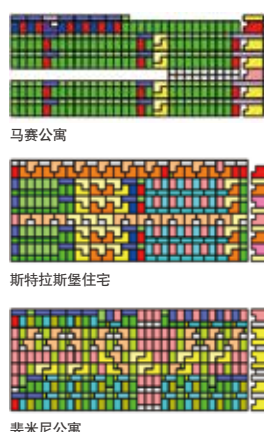
在技术条件翻覆变化的今天,数学工具已不限于设计流程中的辅助;计算机程序能够独立地求解定义明确、描述清晰的建筑问题,这为我们进一步理解柯布西耶寻得新的支点。“尺度相当的居住单位”(Unités d'Habitation de Grandeur Conforme)的意蕴在繁杂复合的



1 源点：马赛公寓图纸示意



2 尺度相当的居住单位方案



3 户型模板与容器



4 马赛公寓模板拼贴

功能需求下，达成空间上的多样和集约，具有前述问题的特征，适用于计算机程序自动求解。于是，新的问题应运而生：如何建构这样一套独立的“代劳”程序？柯布西耶精明巧妙的思考，同这样的算法程序又将呈现出什么样的关联？

2 模板拼贴与数学规划

参差异质的居住单元和城市功能被置入整齐划一的网格——这一过程，建筑师仿佛不断选取预先制作的彩色积木，按照既定要求放置在指定容器中（图4）。这类问题我们通常称之为“模板拼贴”问题。它关乎指定容器内模板的紧密排列，要求满足模板个体之间相互不重叠等一系列限制要求。这种“限制—目标”组合而成的问题模式，广泛存在于不同学科中，亦有相应的数学问题模型，如数学规划（mathematical programming）。其问题求解的限制和优化的目标须以方程、不等式或代数式的形式描述；符合特定要求的问题可运用计算机程序自动搜索求解，在空间相关问题的运用包含建筑平面布局^[10-11]、城市设计^[12]、路径规划^[13]等方面；从建筑功能维度来说，涉及中小学建筑^[14]、居住建筑^[15-16]、医院建筑^[17]等。在这一情形中，建筑学问题求解的核心不再是尝试和推翻，而是认知和描述。

对于“尺度相当的居住单位”中的模板

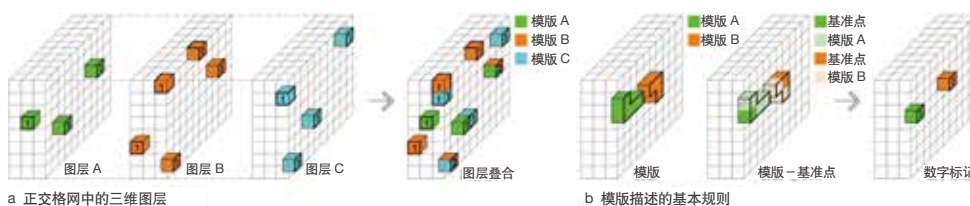
拼贴问题，通常的描述方法是：模板和容器被相同模数的正交格网划分；模板由一个基准格点和若干依附格点组成；容器每一格点根据是否贴有特定模板的基准格点而被赋值。此时，对于给定的模板类型和容器，将形成一个三维数阵。每个三维数阵可以看作一个“图层”，相互叠加即形成数据意义上的拼贴结果（图5）。这类“模板拼贴”问题的基本结构和构成规则能够被数学规划中的整数规划分支所描述；而特定类型的数学规划问题又能通过调用成熟的计算机程序包高效求解。

在此过程中，需要首先梳理问题中涉及的全部变量，并按照取值范围进行分类；而后，变量被组织成若干待用的代数式并依次序匹配系数，形成方程和不等式并录入程序。一旦所关心的模板拼贴问题被描述成上述形式，计算机程序包便能自动解决复杂的空间分配问题。使用者可以根据实际需要编写程序，将所得数据转化成建筑师偏好的图像形

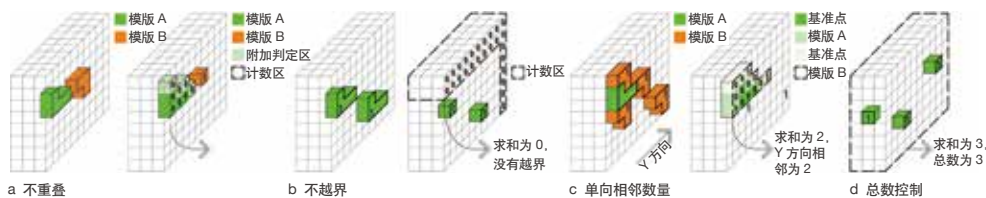
式，也使形成了图纸意义上的模板拼贴求解结果。

在“尺度相当的居住单元”设计中，户型、走廊、交通筒、各类公共空间构成模板拼贴问题中的“模板”；而设计的限制大多可以被转译为模板相关的语句，如：“所有模板个体位于限定范围内”“任意两个模板个体相互不重叠”“每个户型模板至少一处水平与走廊模板相连接”“交通筒模板和俱乐部模板应当均匀地服务整座建筑”等。各个类型的句子可以先被转化为图形问题，再由合适数量的参数和方程来描述。在马赛公寓的设计规则中，涉及的图形问题主要包括：不重叠、不越界、单向相邻数量、总数控制等（图6）。藉此，“尺度相当的居住单元”中颇为重要的户型排布问题方与所述计算机程序产生联系。

以马赛公寓为例，进行“尺度相当的居住单元”生成实验，可得到大量符合要求的“仿制品”。图7展示了部分生成结果。这些



5 模板拼贴问题在正交格网中的描述



6 限制规则的转译方法



7 生成实验的部分结果

生成结果在户型组合、公共空间布置等方面表现出更大程度的多样性和随机性，同时也为技术问题适配带来更大的挑战。从结果来看，整数规划驱动的模板拼贴模型能够模拟马赛公寓中户型排布的基本规律。

应当指出的是，数学规划建筑学方面的运用远不及其在其他自然科学、工程技术、社会研究领域广泛。在这些应用中，数学规划通常被视作提高效率、降低工作成本的重要工具——在此意义上，数学规划的基本思想与柯布西耶及其所处的战后社会产生了微妙的适配——彼时对高效建筑生产的需求胜过任何历史阶段，空间分配的经济性在现代主义语境下愈发值得关注。这便更令人好奇，当它被运用于建筑学问题时，与柯布西耶的所思所想是何种程度上的前赴后继，抑或殊途同归？为了更为具体地探究柯布西耶的所思所想同数学工具之间的微妙关系，下文将从 3 个方面展开讨论。

3 模数

模数是人类自古以来建立的建筑生产方

法^[18]；在《走向新建筑》中：“模数进行度量 and 统一”^{[19]63}。这一建筑学语境下的表述，亦适用于对计算机程序中数据结构的理解。当问题被描述为整数规划的形式，也就找到了最小的解决单位，进而形成相应的“解空间”。求解过程既是在高维解空间中寻找若干格点，又映射在现实空间的一系列三维网格上；每个格点对应着标记数字的网格，这些网格又以图层叠合的方式构成生成结果。以此为基础，模板拼贴问题的求解，恰恰是在现实空间中匹配最小单位，作为模板、容器等一切要素的度量。支配空间的母体——现实空间中的网格基准，在“解空间”内划定了设计结果可能性的边界，从而体现这一度量。这便产生了程序求解的模数。

由程序中的“解空间”分析柯布西耶，除去问题求解自身所含的流程，另有几分辩证的意味：若将毫无规则与参照的设计视作客观上具有无限可能，则柯布西耶所给出的模数标准是对解空间的有效限定；若无限可能因主体的狭隘而收敛于某一特定结构中，模数则无疑又为更多可能性的探索奠定了基

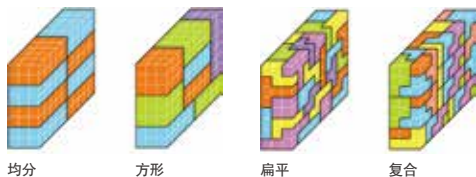
础。但真正有趣的是凌驾于更多可能性之上的可能，因柯布西耶并不尽然将某一模数作为求解的最小单位，即便我们能够从设计结果中分析出这样的度量。更多时候，模数是一种大致的、可能的参照；面对更为具体的楼道、梯间又表现出恰当的灵活性；它更像是一种工具，将多样的住宅统一到便于设计和生产的特定秩序中。松弛的秩序中，初始解空间在求解过程中仍能变化，进而生发出新的可能。

在《走向新建筑》的“基准线”章，柯布西耶写道：“请注意这些平面，一个基本的数学支配着它们……为了建造得好一些，为了比较好地分布应力，为了建筑物的牢固与实用，他采用了量度，他采用了一个模数，它控制着他的工作，它带来了秩序”^{[19]61}。此处的“支配”一词，更强调控制和管理³⁾，与网格基准对生成实验的支配大相径庭。

在前述生成实验中，忽视微调而将繁复的户型归结为屈指可数的几种体块类型，是一种惯常的抽象转化；但又由此产生新的问题，即程序中建构的设计过程因对“模数”理解方式的不同，也就同时否定了在人工设计中至关重要的灵活多变的处理。倘若从孤立的方案中抽离，连续浏览柯布西耶的多个设计，便会发现，斐米尼公寓的户型调整似乎是从马赛公寓中孕育出来的。柯布西耶原本痴迷的酒瓶和架子，亦即在机器理性的思索中勾勒出的理想原型，在马赛公寓设计中产生了微妙的变化。

4 层级

模数建立了不同层级之间的转换标尺，使得模板和容器以“拼贴”的关系相联结。然而，模数的讨论终究限于数据结构本身，仅是问题的描述；层级关系则是搜索求解的过程的一种表征。难以穷尽的可能性孕育出各式各样的启发式搜索方法，而柯布西耶的求解同样处于辅助规则的引导中。“一些决定、应用及习惯偏向于那些令人震惊的事情上，它们让人不适，构成了束缚，任意复杂



8 层级秩序示意

化了规则。我们没有留意这样一件事。在某些不适产生时，一个简单的顿悟解开了束缚，发现了想象、自由创新的规则。”^[20]⁴ 这些规则并不存在于问题的初始定义中；它们是求解过程附带的限定。

建立在问题初始定义之外的引导，除去模数既有的规定性，还涉及模板之间如何被组合，从而构成复杂的建筑体量；这种组合，可能产生额外的层级秩序，而成为引导规则的外在表征。在前述生成实验中，这一秩序是扁平的：任何一处微小扰动，都可能引发全局排列的更新。直观上理解，这一特征源于模板之间咬合关系的复杂多样；这种多样性又依赖于程序的算量优势，而得以大量呈现。实验生成结果包含的一切可能引导，来源于一般性、通用性的搜索方法；而结果所呈现出的趋同的组合关系，可看作原始条件设置所限定出的结果。

在初始概念阶段，柯布西耶的集合住宅作品有时同样被看作是扁平的——户型模板相互咬合成巨大的空中城市，与尺度层级分明的城市街区相异。从设计结果来看，柯布西耶的作品较之生成实验又呈现出更为鲜明的层级秩序和组合倾向，也就是在前述原始条件包含的必然性之上，额外确定的秩序（图8）。图2给出的案例表现出这样的层级关系：在特定的户型之间形成了相互组合的默契，这些组合又同走廊和公共空间形成另一个层级单位。此时，整个系统相对于某一户型的调节处在相对稳定的状态，局部的关系对全局而言是微弱的；这便与生成实验中层级关系的产生有所区别。例如，柯布西耶对差异性的一种操作方式可归结为：“保持水平向的整齐，即保证交通”^[4]²⁸。此处“保证交通”

为原始条件要求，“水平向的整齐”则为额外确定的秩序。在生成实验中，显然，这一额外限定并不得到体现。

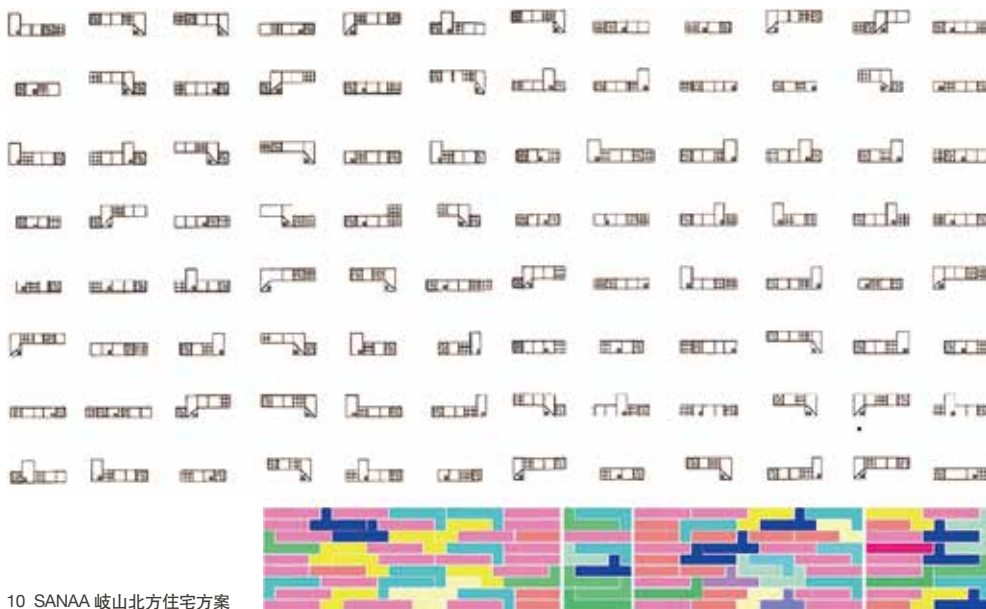
不过，额外的层级秩序控制并非简化问题的唯一方式。倘若在问题的定义中回到二维，乃至以一些随遇而安的剖分代替酒瓶和架子的原型，也便不存在问题分解的困难。正因此，MVRDV 的柏林无人区住宅方案（图9）以及 SANAA 的岐山北方住宅（图10）在剖面上得以呈现出的更为突出的异质性——事实上也局限于特定剖面。前者可以看作是小规模孪生住宅对应的大尺度原型，拼贴问题由更难控制的剖分转变而来；后者则因指向轻薄的集合住宅体积，而将107户的组合问题限定在展开的立面上。然而，后人的选择对柯布西耶而言并无意义，1945年来之

不易的机会对于他预先定义的复杂三维拼接原型而言弥足珍贵，最终触发了额外的层级关系及相应的均质、重复。

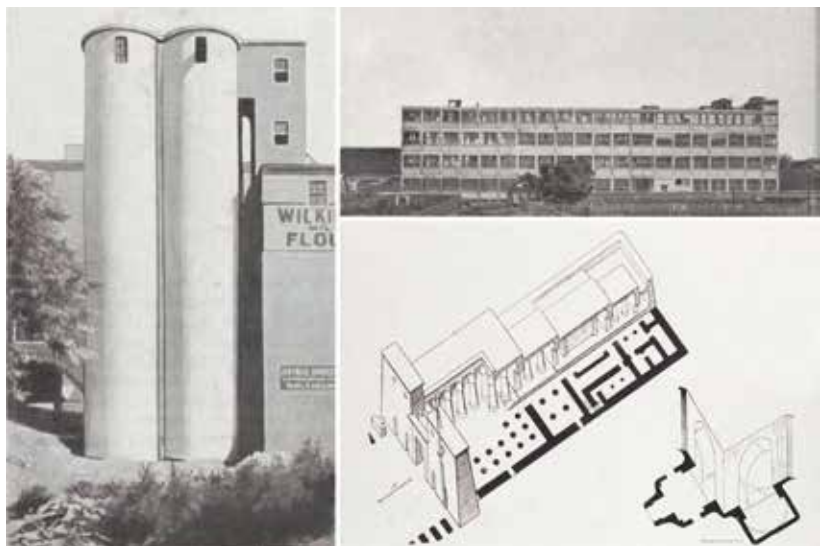
这固然是生成实验和柯布西耶之间的差异，但也蕴涵柯布的试探与转变：从机器生产回到复杂的真实的现世界。1922年，柯布西耶将100所别墅聚集在一起时⁴⁾，尚无令人焦躁的异质性、多样性问题侵扰，他在意的议题仅有如同制造福特汽车一般成批地生产住宅；蛛丝马迹不过于笔记本上记下的神父劳吉埃的召唤：“细节上的统一，整体上的庞杂”^[21]。我们所见的结果，像是转变过程中的临时产物。持序与失序之间，柯布西耶秉持着光辉城市的坚定理想，身陷转变中的临时状况。言辞之激烈始终倒向理想主义那一边：“光辉城市就此诞生，灿烂夺目！”



9 MVRDV 柏林无人区住宅方案



10 SANAA 岐山北方住宅方案



11 柯布西耶给建筑师的3项备忘示例

让反对的人见鬼去吧！”^{[3]318} 1949年的7月，在马赛公寓招待完20位合作者及部长夫妇的柯布西耶如是说。

5 量形

数学是人类来认识世界的一个出色的想象结构；模度是在数学与人类尺度之上组织构成的尺度^{[20]42}。在所见的形式背后，量，乃至量的关系，贯穿始终：“模数”一节讨论的是描述与制约，而“层级”一节的意蕴是组织与推演。在想象结构的限定下，形能够被量描述，量又能可视化成形，二者之间似乎产生了一种对等的转化关系。那么，整数规划程序中量的运算能否对等地反映柯布西耶的设计？倘若不能，量的局限性又体现在何处？

不妨设想两个基本的经验性原则：建筑师常常以形的操作来推进设计，而非量的计算；又由于上述对等的描述关系，形的背后总有量，乃至量的关系。倘若量与形，两条交织的主线并存于一个方案的推演，那么过程中形所给予的视觉反馈，便是判断两条主线是否等同的标准。这种判别对程序而言显而易见，因方案最终所遵循的规则确定于初始，而计算过程中迭代所依赖的反馈亦与

设定的标准相对应。即便将量的关系转译为形，推演过程并无差别。

有待讨论的是，柯布西耶对形的操作能否等价于实验中这种不可逆的量的计算。一方面，可追溯至柯布所述“由接近最终的确定的标准为依据组织起来”^{[3]303}；换言之，柯布西耶认为马赛公寓的设计所遵循的规则并未在过程中经由某种“形”的反馈而大易其道，量在其背后的组织也就是连续而确定的。另一方面，建筑设计近乎形的游戏，柯布西耶对建筑的抽象有如3项备忘⁵⁾，而非数量关系；其中，体块和表面的生成元是平面，平面又体现出“韵律”^{[19]24}，因而人们能从图11中感受到相应的秩序：不论是体块间的光影，表面上的格栅，又或是平面作为图示而呈现出的结构。即便这些秩序被数量的基准支配，3项备忘所提取的特征仍具有视觉上独立的含义——它具有很强的主观性，真正被量描述而趋于客观、稳定的仅为少数。常用的指标，如容积率、得房率、高宽比，远不能企及形态特征的千变万化。从这一点上来说，柯布西耶“接近最终确定的标准”显得颇为理想化。

事实上，生成实验结果中的“形”同样可能暗含某种观念或需要。例如，一些示例

显现出多孔洞的状况，便可看作一种形的特征。这种形的特征即便可以被量描述，也并不源于某一处量的关系。它的产生似是一番意外，而这种意外又无法像手工模型中产生的令人兴奋的创意，顺序地进入迭代。这个意义上，量的抽象更超过形：它始终自圆其说地运转，不产生外延的、模糊的环节。但是，当量被转化为形时，又时常能够发现与某种观念相匹的形的特征，这便是形超乎量的意义所在。

轻易断言柯布西耶是否采纳了这样的反馈，并无直接依据。但结合前两节的探讨，可以发现：程序的“模数”之外有不能为既定的量所描述的形；求解的“层级”之外有不曾被量的关系预定义的形的关系；因此，柯布西耶也并未自信地断言“最终的确定的标准”。在柯布西耶组织这些“盒子”的过程中，设计和调整自始至终表征了某种形的需要，而这种形的需要受制于模糊创想的标准和规则；形与规则之间形成了一种交替出现的因果关系，并不能分清逻辑上的先后。这也就不同于程序所生成的结果——量推演至一定程度时转化而来的后置的形。对于柯布西耶而言，量的关系亦扮演一种被动的角色。它能够描述某一特定状态的抽象，又有失规则与需求之间的互动关系；“状态的抽象”并不真正时刻存在，量的运算自始至终不会反馈于规则。

探讨的背后，潜藏着更为深刻的认识论命题：形可与量匹配，形的特征却不必然与量的关系对应。运用形来描述量的关系是人类形象思维使然；发掘量在形问题中的潜力则是当代计算机算量优势引发的革命。量与形之间的连接固有深厚的基础，马赛公寓的生成实验却让我们看到这种连接的局限。

6 结语


“尺度相当的居住单位”的设计能够在一定程度上为程序所模拟，在部分情形中展现出丰富的变化。但详细阐释、比较整数规划的逻辑内涵与柯布西耶的所思所想，似乎又

能寻得更多有趣的差异。在数据结构的限定下，程序服从“模数”，而马赛公寓的设计仅将模数作为基准和参照；在搜索求解的过程中，程序表现原始条件包含的必然性，而柯布在设计中以额外的层级秩序来组织空间；在量形交互的追问里，程序将形作为最终的呈现，而设计师所理解的形态特征无法完全以量的关系替代。这些差异源于“尺度相当的居住单位”中不能以工程师的数学计算替代的部分，也昭示着建筑师在技术条件日新月异的时代浪潮中独有的坐标位置。

有趣的是，相较于肯定建筑师的独有作用，彼时的柯布西耶更倾向于赞美科学家和工程师的计算：“如今工程师们不追求建筑的构思，只简简单单地顺从数学计算的结果（从统治着宇宙的结果导出）和活的有机物的观念；他们使用了基本元素，并且把他们按照规则互相协调起来，在我们心里引起了建筑的情感，从而使人类的作品与宇宙秩序共鸣。这就是美国的谷仓和工厂^[6]”，新时代光辉的处女作，美国的工程师们以他们的计算压倒了垂死的建筑艺术”^{[19]28}。诚然，工程师对数学的应用一定程度上构成了建筑学的价值追求，进而压倒了那个时代的建筑艺术；本文的分析则揭示出宣言未及的一面，亦即建筑师未被压倒的一面。事实上，科学家与工程师对柯布西耶惯用的断言也持有保留而谨慎的态度，正如爱因斯坦所写：“这（模数）是难以带来坏处，易于带来好处的一系列比例”^{[20]34}。兴许是时代的局限，让柯布过度扩充了工程师的作用域；又或是时代的召唤，令这位旗手必然要采纳立场更为鲜明的口号，而有失准确。

基于后一种可能，可补充这样的叙述：柯布西耶所畅想的原型与接近最终确定的标准，并不真正是他设计的面目，而是一套简洁、夺目的说辞；柯布西耶的设计本就是复杂状况下一步一步的推演，模拟实验依赖于经验规则的后发总结。乃至可以更为犀利地发问：程序是否还算是求解了原始的设计问题？当柯布西耶架构 ATBAT^[7] 来设计马赛公

寓时，已然料想到问题超乎寻常的复杂性；简单的数学优化程序，亦止于结果创生后就某一抽象的模拟。对柯布西耶而言，数学并不包括数学内部的各个分支^[22]，而是面对时代洪流与困境，顺流打捞起的线索；这位具有划时代意义的旗手，正是以建筑师独有的方式运用了数学工具，从而重新定义了建筑学。

在柯布西耶眼中，工程师的美学正走向繁荣，建筑则可悲地走向衰落^{[19]13}；百年之后，在技术条件翻覆变化的今天，我们仍可能面对同样的困境和疑惑。“尺度相当的居住单位”包含柯布西耶在 20 个世纪不经意间埋藏的解答，也为此时此刻提供了一份信心和力量。

注释

- [1] 法语原文为：Unités d'habitation de grandeur conforme。
- [2] 指由国家承办的旨在树立典范的建筑。
- [3] 此处“支配”在《走向新建筑》法语版原文中为 régir，英文版的翻译为 govern。
- [4] 柯布西耶设计的“别墅公寓”可看作一系列别墅的集合。
- [5] 指柯布西耶“给建筑师先生们的 3 项备忘”：体块、表面、平面。
- [6] 柯布西耶认为，美国谷仓、工厂相对于巴黎美院所教授的不含“体块”概念的建筑构成压倒性优势。
- [7] ATBAT 的全称为“Atelier des Bâisseurs”，是柯布西耶构架的多学科技术专家合作社，马赛公寓的设计工作组。组织成员包含公务员、工程师和建筑师。

参考文献

- [1] W·博奥席耶·勒·柯布西耶全集第 4 卷·1938—1946 年 [M]. 牛燕芳，程超，译. 北京：中国建筑工业出版社，2005。
- [2] W·博奥席耶·勒·柯布西耶全集第 5 卷·1946—1952 年 [M]. 牛燕芳，程超，译. 北京：中国建筑工业出版社，2005。
- [3] 让·让热·勒·柯布西耶书信集 [M]. 牛燕芳，译. 北京：中国建筑工业出版社，2008。
- [4] 罗雅琴·从马赛公寓到垂直住宅 [D]. 杭州：中国美术学院，2013。

- [5] 王铠·同一和差异——勒·柯布西耶建筑案例研究 [J]. 建筑师，2011(3): 33-41。
- [6] 张翼·“模数” [J]. 建筑师，2007(6): 38-43。
- [7] 王晖·勒·柯布西耶的模度理论研究 [J]. 建筑师，2003 (1): 87-92。
- [8] LOACH J. Le Corbusier and the Creative Use of mathematics[J]. The British Journal for the History of Science, 1998, 31(2): 185-215。
- [9] 童明·机器，建筑——柯布西耶是如何思考建筑的？[J]. 建筑师，2007(6): 15-22。
- [10] KEATRUANGKAMALA K, SINAPIROMSARAN K. Optimizing Architectural Layout Design via Mixed Integer Programming[C]. Computer Aided Architectural Design Futures 2005, 2005: 175-184。
- [11] WU W. FAN L, LIU L, et al. MIQP-based Layout Design for Building Interiors[J]. Computer Graphics Forum, 2018, 37(2): 511-521。
- [12] HUA H, HOVESTADT L, TANG P, et al. Integer Programming for Urban Design[J/OL]. European Journal of Operational Research, 2019, 274(3): 1125-1137[2021-01-14]。
- [13] PENG C-H, YANG Y, BAO F, et al. Computational Network Design from Functional Specifications[J]. ACM Transactions on Graphics, 2016, 35(4): 1-12。
- [14] 张佳石·基于多智能体的建筑形体生成与基于整数规划的建筑空间生成探索 [D]. 南京：东南大学，2018: 23-34。
- [15] 李思颖·基于整数规划的住区生成方法初探——以日照、交通与功能限定为例 [D]. 南京：东南大学，2019。
- [16] HUA H, DILLENBURGER B. Packing Problems on Generalised Regular Grid: Levels of Abstraction Using Integer Linear Programming[J]. Graphical Models, 2023, 130: no101205。
- [17] CUBUKCUOGLU C, NOURIAN P, TASGETIREN M F, et al. Hospital Layout Design Renovation as a Quadratic Assignment Problem with Geodesic Distances[J]. Journal of Building Engineering, 2021, 44: no102952。
- [18] 傅筱·模数的式微 [J]. 新建筑，2006(6): 11-14
- [19] 勒·柯布西耶·走向新建筑 [M]. 杨志德，译. 南京：江苏凤凰科学技术出版社，2014。
- [20] 勒·柯布西耶·模度 [M]. 张春彦，邵雪梅，译. 北京：中国建筑工业出版社，2011。
- [21] W·博奥席耶·勒·柯布西耶全集第 2 卷·1929-1934 年 [M]. 牛燕芳，程超，译. 北京：中国建筑工业出版社，2005: 115。
- [22] LE CORBUSIER. L'architecture et l'esprit mathématique[M]// Les grands courants de la pensée mathématique, Paris: Cahiers du Sud, 1948: 480-491。

图片来源

- 图 1: 参考文献 [1]
- 图 2: 转绘自参考文献 [4]
- 图 4: 参考文献 [1] 和柯布西耶·世界遗产网站 lecorbusier-worldheritage.org/1944-1965/
- 图 9: mvrdiv.com
- 图 10: 参考文献 [4]
- 其余图片为作者团队绘制、拍摄或程序生成